

APLICACIONES MATEMATICAS EN EL DISEÑO DE SISTEMAS TELEINFORMATICOS

Mat. Teresa Silva Ruales
Centro de Matemáticas
Universidad Central del Ecuador

Ing. Marleni Pineda Q.
Escuela de Ciencias
Facultad de Ingeniería
Universidad Central del Ecuador

El presente trabajo propone una metodología de diseño y dimensionamiento de un sistema teleinformático, basado en el estudio de sus componentes y apoyado en una base matemática. Esta metodología incluye tópicos referentes al estudio probabilístico de las transacciones para determinar el volumen de información a ser manejado, al dimensionamiento de una red de teleproceso en lo que se refiere al número de terminales, líneas de comunicación y las características del sistema central.

1. PRESENTACION

El Diseño de Sistemas Teleinformáticos en Latinoamérica es realizado exclusivamente por empresas que comercializan equipos informáticos, quienes en vez de realizar un diseño en función de los requerimientos reales del usuario lo sobredimensionan y equivocan el equipo sugerido, lo cual constituye una desventaja puesto que implica un desperdicio de recursos. El usuario de un Sistema Teleinformático puede conocer los requerimientos del mismo en base a un estudio de sus componentes y a una evaluación de los equipos ofrecidos.

Nuestro objetivo es presentar una alternativa para una adecuada elección del equipo informático, para lo cual hemos seguido una Metodología de Diseño de Sistemas Teleinformáticos [1], la misma que está apoyada en una base matemática, identificando los modelos matemáticos y los parámetros utilizados para construir un algoritmo que permita la mecanización del diseño de una red de teleproceso, resultando un programa de fácil manejo sin que se requiera tener conocimientos especializados sobre matemática e informática.

2. MODELOS MATEMATICOS EMPLEADOS

La base matemática para el Diseño de Sistemas Teleinformáticos se refiere fundamentalmente a la Teoría de Probabilidades y Teoría de Colas, las cuales se emplean en la evaluación de los diferentes componentes del sistema gracias a la naturaleza aleatoria de las variables del mismo y de las que intervienen en cada relación dentro del sistema. En general, para aplicar la teoría de colas, en el desarrollo analítico se considera el sistema en estado estacionario

A continuación presentamos en forma resumida las principales ecuaciones matemáticas que se utilizan en el desarrollo de esta metodología, en lo que se refiere a la Teoría de Colas.

Los parámetros de un sistema de colas se especifican según la siguiente nomenclatura: $A/B/m/k/l$, donde A - función de distribución de tiempos entre llegadas. B - función de distribución de los tiempos de servicio. m - número de servidores independientes. k - capacidad de almacenamiento de la cola, si falta se supone infinita. l - población de usuarios, si falta se supone infinita. Los indicadores A y B suelen ser la inicial de la distribución en cuestión, así por ejemplo las distribuciones más usadas en teoría de colas son: distribución exponencial (M), determinista (D), Erlang de k etapas (E_k) y cualquier distribución (G).

- Resultado de Little: "El número medio de usuarios en un sistema de colas es igual a la tasa de llegadas de usuarios al sistema por el tiempo medio pasado en ese sistema". $\bar{N}_T = \lambda T_T$

- Intensidad de tráfico: Cociente entre el tiempo medio de servicio y el tiempo medio entre llegadas. $IT = \frac{T_s}{T_a} = \lambda T_s = \frac{\lambda}{\mu}$

- Factor de utilización: Fracción media de servidores ocupados.

$\rho = \min\left(\frac{\lambda}{\mu}, 1\right)$. Si hay un solo servidor: $IT=\rho$, para m servidores: $IT=m\rho$.

- Tiempo medio de respuesta: Tiempo que un usuario pasa en el sistema, esto es la suma del tiempo medio de espera en la cola y el tiempo medio de servicio. $T_r = T_e + T_s$

- Longitud de la cola: Número de usuarios en la cola en el instante t. $\bar{N}_e = \lambda T_e$

- Cola M/M/1:

Probabilidad de que se encuentren N usuarios en el sistema: $P_N = (1-\rho)\rho^N$

Número medio de usuarios en la cola: $\bar{N}_e = \frac{\rho^2}{1-\rho}$

Tiempo medio de espera en la cola: $T_e = \frac{\rho T_s}{1-\rho}$

Número medio de usuarios en el sistema: $\bar{N}_T = \frac{\rho}{1-\rho}$

Tiempo medio de respuesta: $T_T = \frac{T_s}{1-\rho}$

- Cola M/G/1:

Siendo m_2 y σ_s^2 , el momento de segundo orden y la varianza del tiempo de servicio respectivamente, se tiene que:

$$\bar{N}_e = \frac{\lambda^2 m_2}{2(1-\lambda)} + \rho \quad T_e = \frac{\lambda m_2}{2(1-\rho)} \quad T_T = \frac{T_s}{1-\rho} \left[1 - \frac{\rho}{2} \left(1 - \frac{\sigma_s^2}{T_s^2} \right) \right]$$

- Cola M/M/m:

Probabilidad de que estén k usuarios en el sistema:

$$P_k = \begin{cases} \frac{(\lambda T_s)^k}{k!} P_0, & k \leq m \\ \frac{(\lambda T_s)^k}{m! m^{k-m}} P_0, & k > m \end{cases}$$

Probabilidad de que el sistema esté vacío:

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\lambda T_s)^k}{k!} + \frac{(\lambda T_s)^m}{m!} \frac{m}{m - \lambda T_s} \right]^{-1}$$

Utilización del sistema: $\rho_s = \frac{\rho}{m}$

Número medio de usuarios en el sistema: $\bar{N}_T = \lambda T_s = IT$

Probabilidad de que un usuario deba esperar: $P_e = \frac{\rho^m / m!}{\frac{\rho^m}{m!} + (1-\rho_s) \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\rho^k}{k!}}$

Número medio de usuarios en la cola: $\bar{N}_e = \frac{\rho_s}{1-\rho_s} P_e$

Tiempo medio de espera en la cola:

$$T_e = \frac{P_e T_s}{m(1-\rho_s)} = \frac{P_e}{\rho} T_{e1} = \frac{P_e}{\rho} \frac{\rho_s}{1-\rho_s} T_s$$

Modelo del Reparador

Relación de servicio: $Z = \frac{T_f}{T_s}$, donde T_f es el tiempo de funcionamiento y

T_s el tiempo de servicio del reparador.

Probabilidad de que k máquinas estén averiadas: $P_k = \frac{e^{-Z} Z^{m-k}}{(m-k)! e^{-Z} \sum_{j=0}^m \frac{Z^j}{j!}}$

Utilización del reparador:
$$\rho_R = 1 - \frac{z^m/m!}{\sum_{j=0}^m \frac{z^j}{j!}}$$

Número de máquinas en la cola de reparación:
$$\bar{N}_0 = m - (Z+1)\rho_R$$

Número medio de máquinas averiadas:
$$N_T = m - Z\rho_R$$

Tiempo medio entre fallos:
$$T_F = T_0 + T_s + T_f = \frac{mT_0}{\rho_R}$$

Tiempo medio que una máquina está averiada:
$$T_T = T_0 + T_s = \frac{mT_0}{\rho_R} - T_f$$

$$\frac{T_F}{T_f} = \frac{m \sum_{j=0}^m \frac{z^j}{j!}}{\sum_{j=1}^{m-1} \frac{z^{j+1}}{j!}} = \frac{m}{\rho_R Z}$$

2. MECANIZACION DE LA METODOLOGIA DE DISEÑO DE SISTEMAS TELEINFORMATICOS

A continuación se presenta un esquema general para la mecanización de la metodología antes mencionada mediante actigramas, los cuales se encuentran etiquetados en forma jerárquica. Un actigrama tiene la estructura de la figura 1.

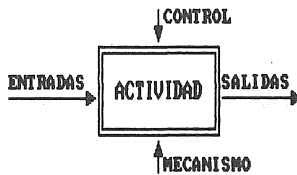
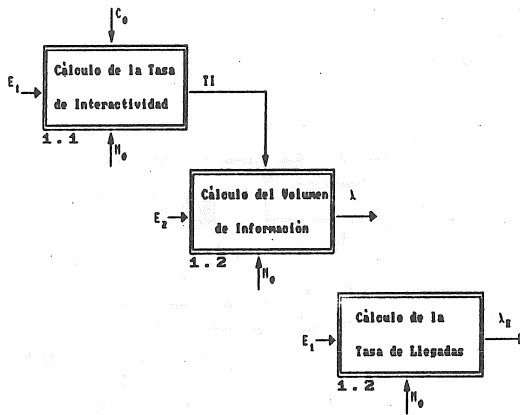


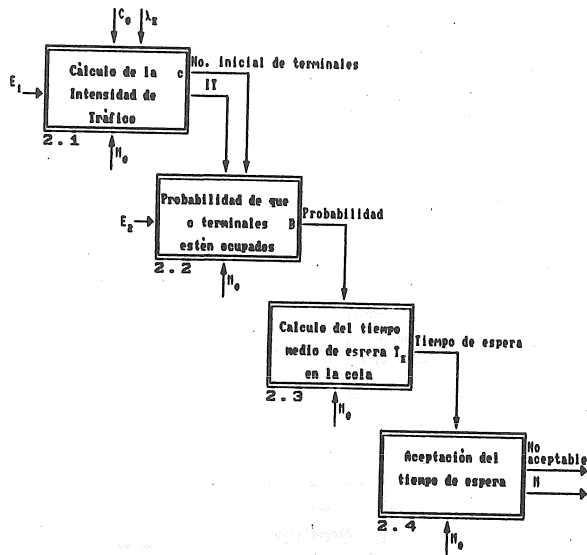
Fig. 1. Estructura de un actigrama

En el actigrama general A, se puede apreciar la función principal de esta aplicación. El actigrama A0 nos indica las fases de tratamiento, que son las siguientes:

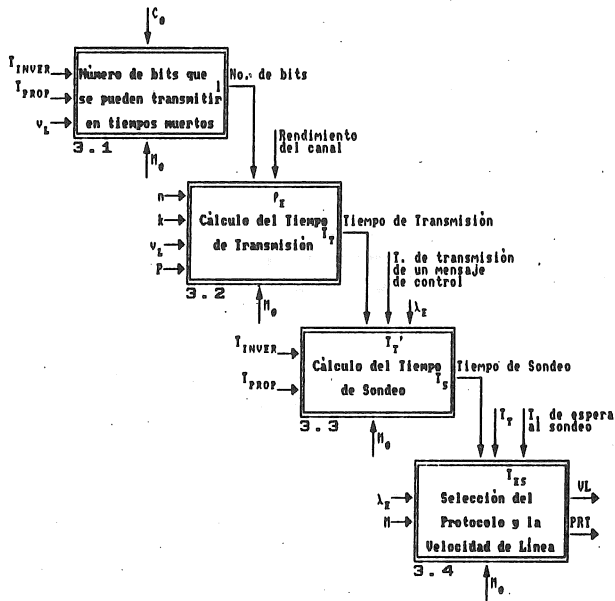
- A1: Evaluación de transacciones
- A2: Evaluación del número de terminales
- A3: Evaluación de las líneas de comunicación
- A4: Evaluación del Sistema Central



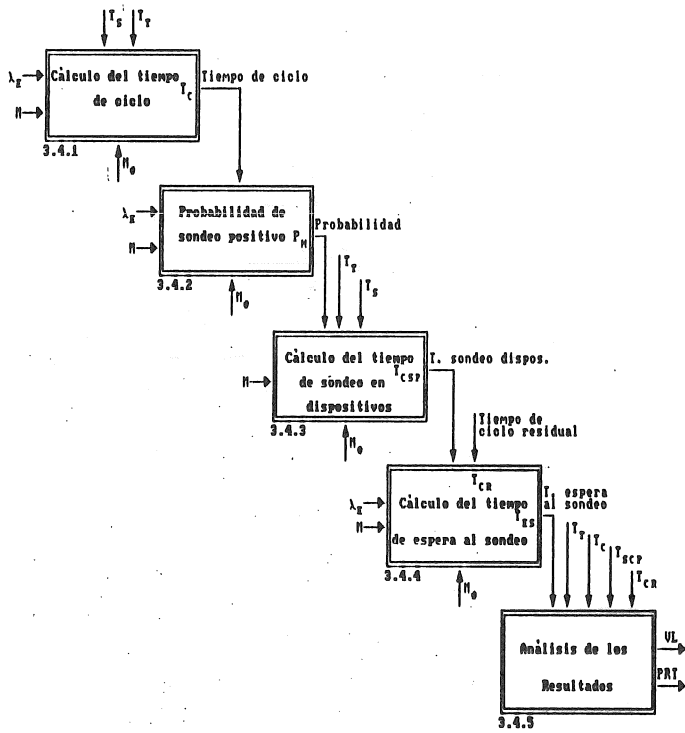
A1: Evaluación de Transacciones



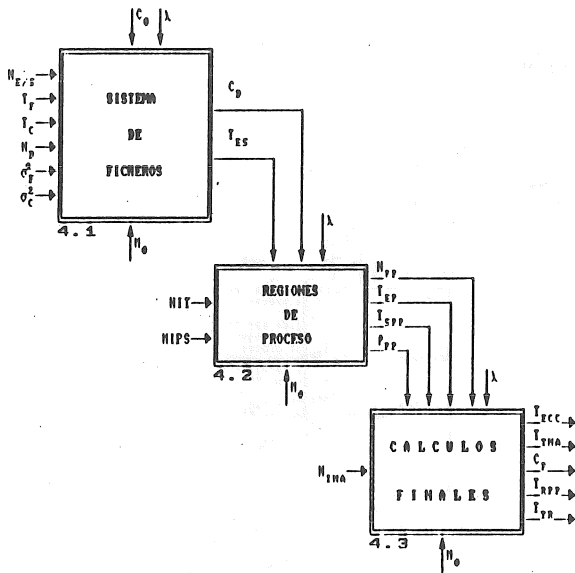
A2: Evaluación del Número de Terminales



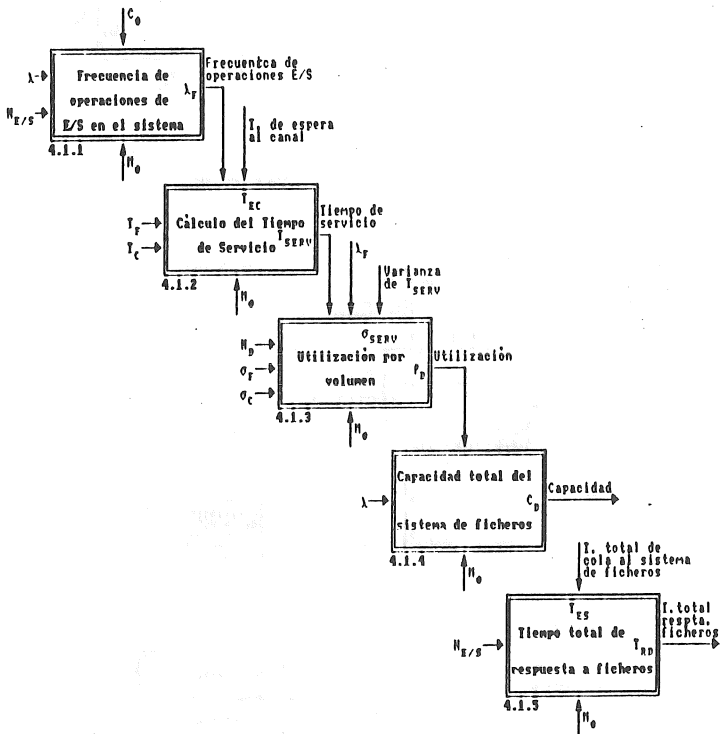
33: Evaluación de las Líneas de Comunicación



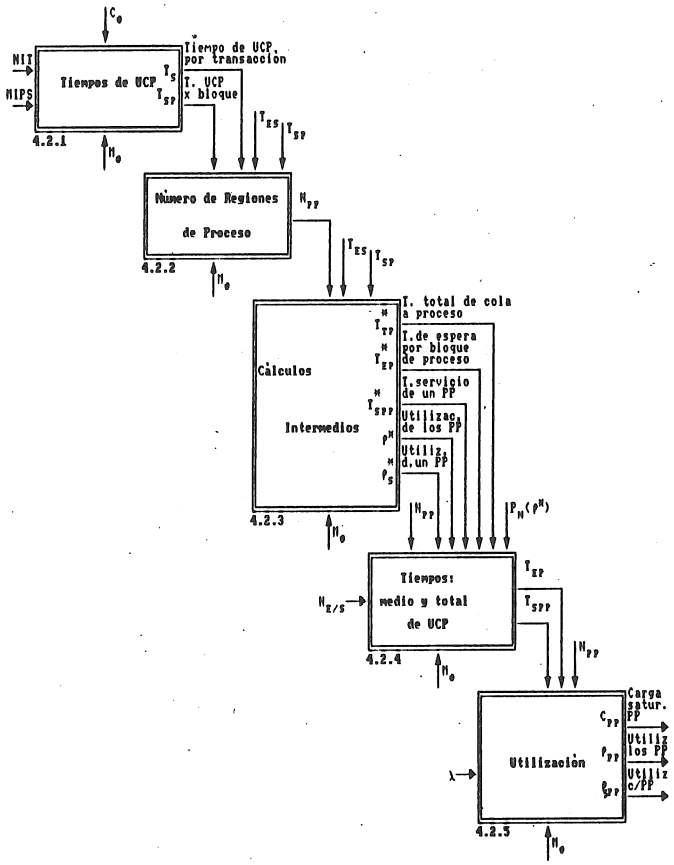
34: Selección del protocolo y velocidad de línea



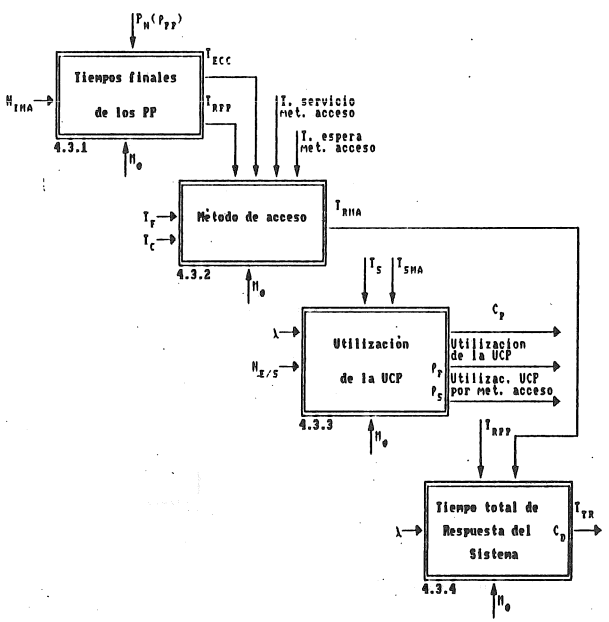
A4: Evaluación del Sistema Central



A4.1: Sistema de Ficheros



A42: Regiones de Proceso



A43: Cálculos Finales

A1: Evaluación de Transacciones

Función: Estudio probabilístico de las transacciones en base a datos obtenidos de un análisis funcional de los requerimientos del sistema se determina el volumen de información a ser manejado (transacciones de operador/segundo), la tasa de interactividad (transacciones de operador/transacción de usuario). Además encuentra el número de transacciones de operador y la tasa de interactividad de cada centro y del sistema en general.

Datos:

- Número de tipos de transacciones de usuario, TU, (NTU).
- Número de tipos de centros (NC).
- Nombre de cada tipo de TU.
- Número de transacciones de operador (TO) por cada TU (TO_j).
- Nombre de cada tipo de centro y número de agencias.
- Número de TU por cada centro (TU_{j1}, transacciones tipo j para el centro i).

Operaciones:

- Cálculo de la tasa de interactividad o número de transacciones de operador para cada tipo de centro.

$$TI_1 = \frac{No. TO}{No. TU} = \frac{\lambda (TO)_1}{\lambda (TU)_1}$$

- Sea TU_i el número total de transacciones en el centro i, G_i, el número de agencias en el centro i; entonces:

$$\lambda (TU)_1 = \sum_{j=1}^{NTU} TU_{j1}$$

$$\lambda (TO)_1 = \sum_{j=1}^{NTU} TO_j TU_{j1}$$

- Cálculo de las transacciones de operador por cada tipo de centro.
 $TOC_1 = \lambda (TU)_1 * TI_1 * G_1$
- Cálculo de las transacciones de operador del sistema, resultando del número de transacciones diarias.

$$TO_{SISTEMA} = \sum_{i=1}^{NC} TOC_i$$

- Cálculo del número de transacciones de operador y de usuario (TO_{SISTEMA}) por hora, o y segundo.

λ = Número de transacciones por segundo

λ_E = Número de transacciones de usuario por segundo

A2: Evaluación del Número de Terminales

Función: Consiste en dimensionar la red de teleproceso en lo que se refiere al número de terminales de acuerdo al volumen de información calculado y al tiempo medio de espera en la cola, el mismo que se calcula mediante un

proceso iterativo utilizando las ecuaciones de una cola con servidores múltiples.

Datos:

- Tiempo de servicio de un terminal (T_s), en cada centro.

Operaciones:

- Cálculo de la intensidad de tráfico: $\rho = \lambda E T_s$
- Número inicial de terminales: $c = \rho$
- Cálculo iterativo para encontrar el número de terminales por cada centro

$$c = \frac{B T_s}{T_s (1 - \rho_T)}$$

- Cálculo del porcentaje de ocupación del terminal: $\rho_T = \frac{\lambda E T_s}{c}$
- Búsqueda de la probabilidad de que los c terminales estén ocupados, aplicando la ecuación de los sistemas con servidores múltiples:

$$B = \frac{\frac{\rho^c}{c!}}{\frac{\rho^c}{c!} + (1 - \rho_T) \sum_{i=0}^{c-1} \frac{\rho^i}{i!}}$$

- Búsqueda del tiempo medio de espera en la cola: $T_e = \frac{B T_s}{c (1 - \rho_T)}$
- Incremento del número de terminales para seguir con los cálculos hasta que T_e sea aceptable.
- Una vez que T_e es aceptable, c es el número de terminales.

A3: Evaluación de Líneas de Comunicación

Función: Tiene como objetivo encontrar el tipo de línea de comunicación y el protocolo de línea que debe usar el sistema teleinformático, evaluando las características de los tipos de líneas ofertadas para que el usuario pueda elegir la línea y protocolo más convenientes a sus necesidades.

Datos:

- Distancia a considerar (distancia)
- Velocidad de propagación de las ondas según el tipo de línea (V_{PROP})
- Número promedio de caracteres por mensaje (n)
- Datos de las líneas de comunicación a evaluarse:
 - Número de líneas que se considerarán
 - Velocidad de cada línea en bps (v_1)
- Probabilidad de error por bit (10^{-5} para líneas dedicadas y 10^{-4} para líneas conmutadas).

- Datos de los protocolos de línea:
 - . Número de tipos de protocolos que se considerarán
 - . Nombre de cada protocolo
 - . Número de bits de control (k)
- Datos del modem:
 - . Tiempo de inversión en segundos (T_{inver})
 - . Tiempo de propagación en segundos (T_{prop})

Operaciones:

- Tiempo de propagación en la línea: $T_P = \frac{\text{distancia}}{V_{prop}}$
- Cálculo del número de bits que se pueden transmitir durante los tiempos muertos de inversión y propagación: $l = v_1(T_{inver} + T_P)$
- Cálculo del rendimiento del canal: $\rho_E = \frac{\frac{n}{v_1}}{\frac{(n+k+l)}{v_1} e^{(n+k)P}} = \frac{n}{n+k+l} e^{-(n+k)E}$
- Cálculo del tiempo de transmisión: $T_T = \frac{n+k+l}{v_1} e^{(n+k)P}$
- Cálculo del tiempo de transmisión para un mensaje de control:

$$T'_t = (k+1) \frac{e^{kP}}{v_1}$$
- Cálculo del tiempo de sondeo: $T_s = 2(T'_t + T_{prop}) + T_{inver}$
- Selección del protocolo y la velocidad de la línea:
 - . Cálculo del tiempo de ciclo: $T_c = \frac{MT_s}{1 - \lambda_E T_s}$
 - . Búsqueda de la probabilidad de sondeo positivo: $P_m = \frac{\lambda_E T_c}{M}$
 - . Cálculo del tiempo de sondeo en dispositivos: $T_{csp} = MT_s + T_t + P_m T_t (M-1)$
 - . Cálculo de la varianza de T_{csp} : $V_c = MP_m |E(t_c^2) - P_m T_c^2|$; $E(t_c^2) \approx T_c^2$
 - . Cálculo del tiempo de ciclo residual: $T_{cr} = \frac{E(t_c^2)}{2T_c} = \frac{T_c^2 + V_c}{2T_c}$ (M/G/1)
 - . Cálculo del tiempo de espera al sondeo: $T_{es} = \frac{T_{cr}}{1 - \lambda_E T_{csp}/M}$
- Impresión de los resultados encontrados, con opción a seguir calculando para otro protocolo y otra velocidad de línea.
- De acuerdo a los resultados, el usuario seleccionará la línea y el protocolo que más le convenga.

A4: Evaluación del Sistema Central

Función: Conociendo las características del equipo y el volumen de información a ser manejado se obtiene los tiempos de respuesta del sistema en base a una descomposición de las funciones de la unidad central en: sistema de ficheros, regiones de proceso y tiempos finales, adaptando las relaciones entre sus elementos a modelos de teoría de colas.

Datos:

- Sistema de ficheros
 - . Número de transacciones por segundo (λ)
 - . Número de operaciones de entrada/salida por transacción ($N_{E/S}$)
 - . Tiempo medio de acceso a un registro de fichero por operación de E/S (T_f)
 - . Tiempo medio de ocupación del canal por operación de E/S (T_c)
 - . Número de volúmenes de disco (N_D)
 - . Varianza de acceso a registro de ficheros (σ_f^2)
 - . Varianza de tiempo de canal (σ_c^2)
- Regiones de Proceso
 - . Número de instrucciones por transacción (NIT)
 - . Capacidad de proceso de la UCP en millones de instrucciones por segundo (MIPS)
 - . Número de instrucciones del método de acceso por transacción (NIMA)

Operaciones:

SISTEMA DE FICHEROS:

- Frecuencia de operaciones de E/S en el sistema: $\lambda_F = \lambda N_{E/S}$
- Cálculo de Z (modelo del reparador): $r(Z) = \lambda_F T_c$ utilización del canal

$$r(i) = 1 - \frac{\frac{i^{ND}}{(ND)!}}{\sum_{j=0}^{ND} \frac{i^j}{j!}}$$

- Cálculo del tiempo de espera al canal: $T_{ec} + T_c = \frac{N_D}{\lambda_F} - Z T_c$
- Tiempo de servicio: $T_{SERV} = T_{ec} + T_c + T_f$
- Varianza T_{ec} : $\sigma_{ec}^2 = T_{ec}^2$
- Varianza T_{SERV} : $\sigma_{SERV}^2 = \sigma_f^2 + \sigma_{ec}^2 + \sigma_c^2$
- Utilización por volumen: $\rho_D = \frac{\lambda_F}{N_D} T_{SERV}$

- Capacidad total del sistema de ficheros: $C_D = \frac{\lambda}{\rho_D}$

- Tiempo total de cola al sistema de ficheros:

$$T_{es} = \frac{T_{SERV}}{1-\rho_D} \left[1 - \frac{\rho_D}{2} \left(1 - \frac{\sigma_{SERV}^2}{T_{SERV}^2} \right) \right]$$

- Tiempo total de respuesta a ficheros: $T_{RD} = N_{E/S} T_{es}$

REGIONES DE PROCESO (PP):

- Tiempo de UCP por transacción: $T_s = \frac{NIT}{MIPS} 10^{-6}$

- Tiempo de UCP por bloque: $T_{sp} = \frac{T_s}{N_{E/S} + 1}$

- Número de regiones de proceso: $N_{PP} \approx \frac{T_{ES}}{T_{sp}}$

- Tiempo total de cola a proceso: $T_{N_{PP}}(Z) = \frac{\frac{Z}{N_{PP}}!}{\sum_{j=0}^{N_{PP}} \frac{Z^j}{j!}}$, $Z = \frac{T_{es}}{T_{sp}}$

- Tiempo de espera por bloque de proceso: $T_{TP}^* = T_{EP}^* + T_{sp} = \frac{N_{PP} T_{sp}}{T_{N_{PP}}(Z)} - T_{ES}$

siendo $Z = \frac{T_{ES}}{T_{sp}}$ y $T_{N_{PP}}(Z)$ se calcula. $T_{EP}^* = T_{TP}^* - T_{sp}$

- Tiempo de servicio de un PP: $T_{SPD}^* = T_{ES} N_{E/S} + (T_{EP}^* + T_{sp})(N_{E/S} + 1)$

- Utilización de las PP: $\rho^* = \lambda T_{SPD}^*$

- Utilización de un PP: $\rho_s^* = \frac{\rho^*}{N_{PP}}$

- Probabilidad de que los PP estén ocupados:

$$P_N(\rho^*) = \frac{\frac{\rho^{*N_{PP}}}{N_{PP}!}}{\frac{\rho^{*N_{PP}}}{N_{PP}!} + [1 - \rho_s^*] \sum_{k=0}^{N_{PP}-1} \frac{\rho^{*k}}{k!}}$$

- Tiempo medio de espera por bloque de UCP:

$$T_{EP} \approx P_N(\rho^*) T_{EP}^* + [1 - P_N(\rho^*)] \frac{T_{EP}^*}{2}$$

- Tiempo de servicio total de UCP en los PP:

$$T_{spp} = T_{RD} + (T_{EP} + T_{SP}) (N_{E/S} + 1)$$

- Carga de saturación de los PP: $C_{PP} = \frac{N_{PP}}{T_{spp}}$

- Utilización de la regiones de proceso: $\rho_{PP} = \lambda T_{spp}$

- Utilización de cada PP: $\rho_{spp} = \frac{\rho_{PP}}{N_{PP}}$

CALCULOS FINALES

- Tiempo de respuesta de los PP: $T_{RPP} = T_{spp} + T_{ecc}$

- Tiempo de espera en la cola común a los PP

$$P_N(\rho_{PP}) = \frac{1 - r_N(\rho_{PP})}{1 - \rho_{spp} r_N(\rho_{PP})}$$

$$T_{ecc} = \frac{P_N(\rho_{PP})}{\rho_{PP}} T_{ecc1} = \frac{P_N(\rho_{PP})}{\rho_{PP}} \frac{\rho_{spp}}{1 - \rho_{spp}} T_{spp}$$

- Tiempo total del método de acceso

.Tiempo de servicio del método de acceso: $T_{SMA} = NIMA/MIPS$

.Tiempo de espera al método de acceso: $T_{EMA} = \frac{\rho_s}{(1 - \rho_s)} T_{SMA}$

$$T_{RMA} = T_{EMA} + T_{SMA}$$

- Carga de saturación del sistema: $C_D = \frac{1}{T_s + T_{SMA}}$

- Utilización de la UCP: $\rho_D = \frac{\lambda}{C_D}$

- Utilización de la UCP por método de acceso: $\rho_s = T_{SMA} N_E / S$

- Tiempo total de respuesta del sistema: $T_{TR} = (T_{ecc} + T_{spp}) + (T_{EMA} + T_{SMA})$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] GARCIA, J. y GONZALEZ, J., Diseño de Sistemas Teleinformáticos. Madrid. 1982
- [2] HOPPER, A., TEMPLE, S. y WILLIAMSON, R. Diseño de Redes Locales, Traducido por Héctor Carranco Ortiz, Addison Wesley. 1986.
- [3] KLEINROCK, L., Queueing Systems Vol I y II. Wiley and Sons. 1976
- [4] KOBAYASHI, H., Modeling and Analysis, Wesley. 1978.
- [5] MORGAN, B. J. T., Elements of Simulation, Chapman and Hall. 1984.
- [6] SAATY, T. L., Elementos de la Teoría de Colas, versión española de Rafael Pro. Madrid Editorial Juan Bravo. 1967.